

1 Kombinatorik

Permutation	Anordnungen
Variation	geordnete Stichprobe
Kombination	ungeordnete Stichprobe

1.1 ohne Zurücklegen/Wiederholen

Permutation	$P(n) = n!$
Permutation Gruppen	$P(n; n_1, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1! \times \dots \times n_k!}$
Variation	$V(n, k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
Kombination	$C(n, k) = \binom{n}{k}$
Binomialkoeffizient	$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$
falls $k > \frac{n}{2}$	$\binom{n}{n-k}$

1.1.1 Anwendung

x in Gruppe sitzen	$\frac{(x+1)! \times x}{A!}$
abwechselnd sitzen	$\frac{(2 \times \frac{x}{2})!}{x!}$

1.2 mit Zurücklegen/Wiederholen

Variation	$V_W(n, k) = n^k$
Kombination	$C_W(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$

2 Elementare Wahrscheinlichkeitsrechnung

Ereignis	Ausgang eines Experiments
Ereignisraum	Menge aller Ereignisse
Elementarereignis	Teilmenge des Ereignisraums
Gewinnerwartung	Wahrscheinlichkeit $\times$ Gewinn

2.1 Laplace Wahrscheinlichkeit

alle Ereignisse gleich wahrscheinlich

Wahrscheinlichkeit	$P(E) = \frac{ \text{günstige Ereignisse} }{ \text{mögliche Ereignisse} }$
Anzahl Ereignisse	$ P(\Omega) $
Gegenwahrscheinlichkeit	$1 - P(X)$

2.2 Kolmogoroff Wahrscheinlichkeit

alle Ereignisse unterschiedlich wahrscheinlich

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$$

2.3 bedingte Wahrscheinlichkeit

A und B	$P(A \cap B) = \frac{ A \cap B }{ \Omega }$
A wenn B	$P(B A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$

2.3.1 Stochastische Unabhängigkeit

wenn gilt: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$

2.3.2 totale Wahrscheinlichkeit

Alle Wege zusammengerechnet

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i) \times P(B | A_i)$$

2.3.3 Satz von Bayes

erlaubt das umkehren der Schlussfolgerung.

$$P(A_j | B) = \frac{A_j \cap B}{P(B)} = \frac{P(A_j) \times P(B | A_j)}{P(B)}$$

2.4 geometrische Wahrscheinlichkeit

nur anwendbar wenn gleiche Maße gleiche Wahrscheinlichkeiten haben. (Laplace)

$$P(A) = \frac{\text{Maß}(A)}{\text{Maß}(\Omega)}$$

bei $(a + b) < 2$ Linie von a=2 bis b=2

2.5 Zufallsvariablen

X : Zufallsvariable

F : Verteilungsfunktion

f : Wahrscheinlichkeitsfkt(diskret) / Dichte(stetig)

diskret: endlich viele Werte

stetig: unendlich viele Werte, Kommastellen

$$F(X) = \sum_{x_i \leq x} f(x_i) = P(X \leq x)$$

$$E(X) = \sum_i x_i \times P(X = x_i)$$

$$F(x = 5) = f(1) + f(2) + f(3) + \dots$$

$$F(x) = 0 \text{ für } x < a \quad F(x) = 1 \text{ für } x \geq b$$

2.5.1 Notwendige Bedingungen für f, F

allgemein

$$f(x) \geq 0 \quad F(x) \in [0, 1]$$

diskret

$$\sum x_i f(x_i) = 1 \quad 0 \leq f(x_i) = P(X = x_i) \leq 1$$

stetig

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

2.5.2 Rechenregeln

allgemein

$$P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X \geq x) = 1 - P(x \leq X) = 1 - F(x)$$

diskret

$$P(X < x_i) = P(x_{i-1}) = F(x_{i-1})$$

$$P(X = x) = f(x)$$

stetig

$$P(X < x) = P(X \leq x) = F(x)$$

$$P(X = x) = 0$$

2.5.3 Erwartungswert

beschreibt die Zahl, die die Zufallsvariable im Mittel annimmt.

diskret

$$E(x) = \sum_i x_i \times P(X = x_i)$$

stetig

$$E(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x \times f(x) dx$$

2.5.4 Binomialverteilung

nur bei unabhängigen Versuchen mit bool Ergebnissen.

$$P(x) = \binom{n}{x} * p^x * (1-p)^{n-x}$$

3 Numerik

3.1 Bisektionsverfahren

f stetig auf $[a, b]$ mit $f(a) * f(b) < 0$

Grenze auf Seite mit Vorzeichenwechsel halbieren.

Verkleinern bis genau genug.

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{b-a}{2^n}$$

3.2 Regula Falsi

Sekante durch $f(a)$ & $f(b)$ legen. Nullstelle neuer Teilungspunkt.

Nullstelle der Sekante bestimmen: $x = a - \frac{f(a)(b-a)}{f(b)-f(a)}$

3.3 Newton Verfahren

Nullstelle der Tangente von $f(x)$ als neuer Teilungspunkt.

$$f(x), x_0 (f'(x_0) \neq 0)$$

$$\text{Punktsteigungsform: } \frac{y-f(x_0)}{x-x_0} = f'(x_0)$$

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

3.4 Interpolation und Ausgleichsrechnung

3.4.1 Interpolation

exakt

3.4.2 Ausgleichsrechnung

bestmögliche Annäherung an gegebene Wertepaare mit Hilfe einer stetigen Funktion

Gesucht ist $f(x) = a \times x + b$

Methode der kleinsten Fehlerquadrate

$$\begin{aligned} \sum x_i &= S_x & \sum y_i &= S_y \\ \sum x_i * y_i &= S_{xy} & \sum x_i^2 &= S_{x^2} \end{aligned}$$

n	x_i	y_i	S_x	S_y	S_{xy}	S_{x^2}
1	...	...	...	...	...	...

$$a = \frac{nS_{xy} - S_y \times S_x}{nS_{x^2} - S_x \times S_x} \quad b = \frac{S_y - aS_x}{n}$$

Notwendige Bedingung: $\frac{dF}{da} = \frac{dF}{db} = \frac{dF}{dc} = 0$

3.4.3 Fehler

$$\begin{aligned} \text{absoluter Fehler} & \quad |X - \tilde{X}| \\ \text{relativer Fehler} & \quad \left| \frac{\text{abs Fehler}}{X} \right| \end{aligned}$$

4 Analysis

4.1 Differentialrechnung

4.1.1 Ableitungsregeln

$f(x)$	$f'(x)$
C	0
x	1
x^n	$n * x^{n-1}$
$c * g(x)$	$c * g'(x)$
$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$
$g(x) * h(x)$	$g'(x) * h(x) + g(x) * h'(x)$
$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{h(x) * g'(x) - g(x) * h'(x)}{(h(x))^2}$
$g(h(x))$	$g'(h(x)) * h'(x)$

4.1.2 Bekannte Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$-\sin(x)$	$-\cos(x)$
$-\cos(x)$	$\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$\frac{-1}{\sin^2(x)}$
e^x	e^x
a^x	$\ln a * a^x$
$\ln(x^n)$	$\frac{1}{x^n} * (x^n)'$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a * x}$

Nullstelle einer e Funktion bestimmen mit $\ln$

4.2 Integralrechnung

a	$a \times x + C$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a} + C$
$\ln x$	$x * \ln x - x + C$
$\sin(x)$	$-\cos(x) + C$
$\cos(x)$	$\sin(x) + C$
$\tan(x)$	$-\ln \cos(x) + C$
e^x	$e^x + C$

5 Weiteres

Kreisfläche $r \times \pi^2$
 Zeitpunkt bestimmen Funktion gleichsetzen