

1 Integralrechnung

echt gebrochen	Zählergrad < Nennergrad
unecht gebrochen	Zählergrad $\geq$ Nennergrad
Untersumme	$\sum_{i=1}^n f(x_{i-1} * \Delta x)$
Obersumme	$\sum_{i=1}^n f(x_i * \Delta x)$

1.1 unbestimmte Integrals

$$\int f(x)dx = F(x) + C$$

1.2 bestimmte Integrale

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

1.3 Grundintegrale

0	C
1	$x + C$
dx	1
$m \cdot x^{n-1}$	$\frac{m}{n+1} \cdot x^{n+1} + C$ wenn $n \neq -1$
x^n	sonst $\ln x $
$\frac{1}{x}$	$\ln x + C$
e^{kx}	$\frac{1}{k} e^{kx} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$-\sin x$	$\cos x + C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x + C$
$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C$
e^{kx}	$\frac{1}{k} e^{kx} + C$

1.4 Elementare Integrationsregeln

Faktorregel Ein konstanter Faktor darf vor das Integral gezogen werden.

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Summenregel Eine endliche Summe von Funktionen darf gliedweise integriert werden.

$$\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_n(x))dx = \int_a^b f_1(x)dx + \dots + \int_a^b f_n(x)dx$$

Vertauschungsregel Vertauschen der Integrationsgrenzen bewirkt einen Vorzeichenwechsel des Integrals.

$$\int_a^b f(x)dx = - \int_b^a f(x)dx$$

Nullintegral Sind die Grenzen gleich ist das Integral = 0.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

Zerlegung in Teilintegrale Die Fläche unter dem Graphen lässt sich in mehrere Teilflächen aufteilen.

$$I = I_1 + I_2$$

1.5 Integrationsmethoden

Wenn die Stammfunktion nicht durch Grundintegrale gebildet werden kann.

1.5.1 Integration durch Substitution

$\int f(ax+b)dx$ $u = ax+b$ $dx = \frac{du}{a}$ $\frac{1}{a} \cdot \int f(u)du$	$\int f(x) \cdot f'(x)dx$ $u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$ $\frac{1}{2}[f(x)]^2 + C$
$\int [f(x)]^n \cdot f'(x)dx$ $(n \neq -1) u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$ $\frac{1}{n+1}[f(x)]^{n+1} + C$	$\int f[g(x)] \cdot g'(x)dx$ $u = g(x)$ $dx = \frac{du}{g'(x)}$ $\int f(u)du$
$\int \frac{f'(x)}{f(x)}dx$ $u = f(x)$ $dx = \frac{du}{f'(x)}$ $\ln f(x) + C$	$\int f(x; \sqrt{a^2 - x^2})dx$ $x = a \cdot \sin u$ $dx = a \cdot \cos u du$ $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cdot \cos u$
$\int f(\sin x; \cos x)dx$ $u = \tan(x \div 2)$ $dx = \frac{2}{1+u^2}du$ $\sin x = \frac{2u}{1+u^2}$ $\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}$	$\int f(x; \sqrt{x^2 - a^2})dx$ $x = a \cdot \cosh u$ $dx = a \cdot \sinh u du$ $\sqrt{x^2 - a^2} = a \cdot \sinh u$

1.5.2 Partielle Integration

$$\int u(x) \cdot v'(x)dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x)dx$$

wenn

- Die Stammfunktion von $v'(x)$ lässt sich leichter finden
- Das entstehende Integral ist einfacher lösbar

1.5.3 Integration durch Partialbruchzerlegung

- Polynomdivision (falls Funktion unecht gebrochen)
- Nullstellen des Nenners berechnen
- Partialbruch aufstellen
- Nullstellen zuordnen
- Brüche gleichnamig machen

6. Gleichungssystem lösen

Bei doppelter Nullstelle: $\frac{A}{x-n} + \frac{B}{(x-n)^2}$

Beispiel:

$$\int \frac{dx}{x^2-x-12}$$

$$0 = x^2 - x - 12 \quad | \text{Faktorisieren}$$

$$0 = (x+3)(x-4)$$

$$x_1 = -3; x_2 = 4$$

$$\frac{1}{x^2-x-12} = \frac{A}{(x+3)} + \frac{B}{(x-4)}$$

$$\frac{1}{(x+3)(x-4)} = \frac{A(x-4)}{(x+3)(x-4)} + \frac{B(x+3)}{(x+3)(x-4)}$$

$$1 = A(x-4) + B(x+3)$$

$$1 = A(-3-4) + B(4+3)$$

$$A = -\frac{1}{7} \quad B = \frac{1}{7}$$

$$= -\frac{1}{7} \int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{7} \int \frac{dx}{x-4}$$

$$= -\frac{1}{7} \cdot \ln|x+3| + \frac{1}{7} \cdot \ln|x-4| + C$$

1.6 Anwendung

Fläche zwischen f(x) und Achse Integrale mit

Grenzen zwischen Schnittstellen mit Achse, addiert

Fläche zwischen zwei Funktionen

- Schnittpunkte als Grenze verwenden
- absolute Differenz der Integrale ist Fläche

Volumen rotationssymmetrischer Körper

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx$$

Bogenlänge einer Kurve

$$\int_a^b \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

Mittelwertberechnung

$$\text{diskret: } \bar{y} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^n y_i$$

$$\text{linearer: } \bar{y} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

$$\text{quadratisch: } \bar{y} = \sqrt{\frac{1}{b-a} \int_a^b [f(x)]^2 dx}$$

2 Folgen und Reihen

2.1 Eigenschaften

2.1.1 Monotonie

$$\text{steigend} \quad a_i \leq a_{i+1}$$

$$\text{streng steigend} \quad a < a_{i+1}$$

$$\text{fallend} \quad a_i \geq a_{i+1}$$

$$\text{streng fallend} \quad a_i > a_{i+1}$$

2.1.2 Beschränktheit / Schranken

$$\text{nach oben/Supremum} \quad a_i \leq S$$

$$\text{nach unten/Infimum} \quad a_i \geq S$$

2.2 Konvergenzkriterien

Notwendiges/Nullfolgen-kriterium $\lim_{i \rightarrow \infty} a_i = 0$

Hinreichende Kriterien:

Quotienten $\lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = q$ $a_n \neq 0$ $q < 1$: konvergent $q > 1$: divergent $q = 1$: keine Aussage	Wurzel $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = q$ $q < 1$: konvergent $q > 1$: divergent $q = 1$: keine Aussage
Majoranten Vergleich mit bekannt konvergenter Reihe $a_n \leq b_n$: konvergent	Minoranten Vergleich mit bekannt divergenter Reihe $a_n \geq b_n$: divergent
Leibniz Alternierende Reihe konvergent wenn $ a_1 > a_2 > a_3 > \dots$	Integral $\sum_{n=a}^{\infty} f(n) \rightarrow \int_a^{\infty} f(x) dx$ konvergent wenn existiert

2.3 Summenwert

wenn der Summenwert existiert, ist die Reihe gleichzeitig konvergent

1. aufteilen in Partialbrüche

$$2. \quad s_n = \sum_{i=1}^n \frac{A}{0_A} + \frac{B}{0_B}$$

$$3. \quad \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

2.4 Potenzreihen

$$\text{Konvergenzradius} \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

 x^n hier ignorieren ↑

$$\text{Mac Laurin} \quad f(x) = f(0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

$$\text{Taylor} \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Ableitungen bilden bis Muster erkennbar, x_0 in diese einsetzen bis Muster erkennbar, diese einsetzen in Bildungsgesetz.

2.5 Konvergenzbereich

- Konvergenzradius berechnen
- An Randpunkten Konvergenz bestimmen
- (divergent: $<$; konvergent: $\leq$)
- Bsp: $-r < x \leq r$

3 Partielle Differentiation

gleiche Regeln wie bei der normalen Ableitung, abzuleitende Komponente ableiten, andere ignorieren/entfernen.

Regeln	$f(x)$	$f'(x)$
Konstante	C	0
von x	x	1
Potenzregel	x^n	$n \cdot x^{n-1}$
Faktorregel	$c \cdot g(x)$	$c \cdot g'(x)$
Summenregel	$g(x) + h(x)$	$g'(x) + h'(x)$
Produktregel	$g(x) \cdot h(x)$	$g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$
Quotientenregel	$\frac{g(x)}{h(x)}$	$\frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{(h(x))^2}$
Kettenregel	$g(h(x))$	$g'(h(x)) \cdot h'(x)$
Kehrwertregel	$\frac{1}{g(x)}$	$-\frac{g'(x)}{g(x)^2}$

bekannte Ableitungen

$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\sqrt[n]{x}$	$\frac{1}{n(\sqrt[n]{x^{n-1}})}$	$-\cos(x)$	$\sin(x)$
e^x	e^x	$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\frac{1}{k}e^{kx}$	e^{kx}	$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\ln(x^n)$	$\frac{1}{x^n} \cdot (x^n)'$	$x \cdot \ln y $	$\frac{x}{y}$
$\log_a x$	$\frac{1}{\ln a \cdot x}$	$\ln u(x) $	$\frac{u'(x)}{u(x)}$
a^x	$\ln a \cdot a^x$	$\frac{1}{2}(u(x))^2$	$u'(x) \cdot u(x)$

Funktionszuwachs $\Delta f = f(x_0 + dx; y_0 + dy) - f(x_0; y_0)$

totales Differential $df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$

4 Vektoranalysis

Betrag $|\vec{a}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n |a_i|^2}$

Normierung $\vec{e}_a = \frac{1}{|\vec{a}|} \vec{a}$

Addition/Subtraktion $\vec{a} \pm \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{pmatrix}$

Skalarmultiplikation $\lambda \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} \lambda a_1 \\ \lambda a_2 \\ \lambda a_3 \end{pmatrix}$

Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$

Skalarprodukt $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + \dots$

Tangenteneinheitsvektor $\vec{T} = \frac{1}{|\vec{r}'|} \vec{r}'$

Normaleinheitsvektor $\vec{N} = \frac{1}{|\vec{T}'|} \vec{T}'$

Krümmung $K = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right|$

Radius der Krümmung $\delta = \frac{1}{K}$

Ortsvektor Der Ortsvektor $\vec{OA}$ von A hat dieselben Koordinaten wie A

Tangentenvektor partiell abgeleiteter Ortsvektor

4.1 Skalarfelder

Verteilung von skalaren Eigenschaften (z.B. Dichte, Temperatur, Konzentration) im Raum bzw. in der Fläche.

Nabla Operator $\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$

Gradient in der Fläche $grad\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \end{pmatrix}$

Gradient im Raum $grad\phi = \vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{pmatrix}$

4.2 Vektorfelder

z.B. Bewegung von Partikeln in einem Geschwindigkeitsfeld.

in der Fläche $\vec{F}(x; y) = \begin{pmatrix} F_x(x; y) \\ F_y(x; y) \end{pmatrix}$

im Raum $\vec{F}(x; y; z) = \begin{pmatrix} F_x(x; y; z) \\ F_y(x; y; z) \\ F_z(x; y; z) \end{pmatrix}$

4.2.1 Divergenz

$div(\vec{F}) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$

$div(\vec{F}) = 0$ Quellenfrei

$div(\vec{F}) > 0$ Quelle

$div(\vec{F}) < 0$ Senke

Rotation $rot(\vec{F}) = \vec{\nabla} \times \vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \\ \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \end{pmatrix}$

Wirbelfrei $rot(\vec{F}) = \vec{0}$

4.2.2 Fluß eines Vektorfeldes

Die Teilflächen einzeln betrachten, addieren

$$\int_{x=x< y=y<}^{x> y>} F dy dx$$

4.3 Linienintegrale

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} (\vec{F} \cdot \dot{\vec{r}}) dt = \int_{t_1}^{t_2} \phi(x; y)$$

4.3.1 Eigenschaften

Richtungsumkehr $\int_{-C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = - \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

Geschlossener Integrationsweg gemeinsamer Anfangs- und Endpunkt $\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$

4.3.2 Potentialfeld/konservativ

Wegunabhängigkeit

Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}; \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Potentialfunktion

$$\phi(x; y; z) = \int \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \int \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \int \frac{\partial \phi}{\partial z} dz + C$$

4.4 Koordinatensysteme**4.4.1 ebenes kartesisches**

$$x = r \cdot \cos \varphi; y = r \cdot \sin \varphi$$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_x \\ \vec{e}_y \end{pmatrix}$$

4.4.2 ebenes Polar

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \tan \varphi = \frac{y}{x}$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \end{pmatrix}$$

4.4.3 Zylinderkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \tan \varphi = \frac{y}{x}; z = z$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

4.4.4 Kugelkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}; \tan \varphi = \frac{y}{x}; \cos \vartheta = \frac{z}{r}$$

$$\begin{pmatrix} a_r \\ a_\vartheta \\ a_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \vartheta \cdot \cos \varphi & \sin \vartheta \cdot \sin \varphi & \cos \vartheta \\ \cos \vartheta \cdot \cos \varphi & \cos \vartheta \cdot \sin \varphi & -\sin \vartheta \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$$

4.5 Oberflächenintegrale

$$\iint_{(A)} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iint_{(A)} (\vec{F} \cdot \vec{N}) dA$$

$d\vec{A}$: Orientiertes Flächenelement

$\vec{N}$: Flächennormale

5 Weiteres

pq Formel $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

Mitternachts $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

5.1 Polynomdivision**5.1.1 Polynomdivision**

Beispiel

$$\begin{array}{r|rr} (2x^3 - 6x^2 - 12x + 16) \div (x + 2) & 2x^2 & -10x + 8 \\ -(2x^3 & +4x^2) & \\ \hline & -10x^2 & -12x \\ & -(-10x^2 & -20x) \\ \hline & & 8x & 16 \\ & & -(8x & +16) \\ \hline & & & 0 \end{array}$$

5.1.2 Horner Schema

Vereinfachte Polynomdivision

Bsp: $2x^3 - 6x^2 + 12x + 16 \div x + 2$

$$\begin{array}{r|rrrr} & 2 & -6 & -12 & 16 \\ + & 0 & & & \\ \hline \cdot(-2) & & & & \\ \hline & 2 & -6 & -12 & 16 \\ + & 0 & -4 & 20 & -16 \\ \hline \cdot(-2) & 2 & -10 & 8 & 0 \end{array}$$

Ergebnis: $2x^2 - 10x + 8$

5.2 Koeffizientenvergleich

zum feststellen ob zwei Polynome gleich sind.

1. Ausmultiplizieren
2. Koeffizienten identifizieren
3. Gleichungssystem aufstellen
4. Gleichungen lösen

5.3 Gauß'scher Algorithmus

Die Lösung eines Gleichungssystems wird nicht verändert werden man

- die gesamte Gleichung mit einer beliebigen Zahl multipliziert
- eine Gleichung zu einer anderen Gleichung addiert oder von ihr abzieht
- zwei Gleichungen miteinander vertauscht

Mit diesen drei Methoden kann jedes Gleichungssystem in eine Dreiecksform gebracht werden.

5.4 Binomische Formeln

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$$

Lässt sich eine Gleichung als erste oder zweite binomische Formel gleich Null setzen, so gibt es nur eine Lösung der quadratischen Gleichung.

5.5 Vereinfachungen

$$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$$

$$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$